Etude de la Méthode de Newton

27 septembre 2016

1 Points fixes, bassin d'attraction

Soient, ici et dans toute la suite du problème, I un intervalle ouvert ou une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et g une application de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$. On dit que l'élément l de I est un *point fixe* de g lorsque $g(l) = l$. On dit qu'un point fixe l de g est *attractif* lorsque $|g'(l)| < 1$, *super-attractif* lorsque $g'(l) = 0$.

Etant donné $a \in I$, on note u_n^a la suite définie par la donnée de $u_0^a = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1}^a = g(u_n)$. Noter que cette suite peut n'être définie que pour un nombre fini d'indices ; s'il existe une partie A de I possédant a et telle que $g(A) \subset A$, la suite u_n^a est définie sur $\mathbb{N}$.

1.1 Bassin d'attraction

Soit l un point fixe attractif de g. Le *bassin d'attraction* de l est l'ensemble $A(I)$ des $a \in I$ tels que la suite u_n^a soit partout définie et converge vers l.

a) Montrer qu'il existe des nombres $\delta > 0$ et $k \in]0,1[$ tels que, pour tout $x \in J = [l-\delta, l+\delta]$, $|g'(x)| \leq k$ puis que, pour tout $a \in J$, u_n^a est partout définie et converge vers l.

b) Montrer que $A(l) = \{x \in I \mid \exists n \in \mathbb{N}, u_n^x \in]l-\delta, l+\delta[\}$, en déduire que le bassin d'attraction de l est ouvert dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\forall a \in A(l), \exists \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset A(l).$$

On note désormais $I(l)$ le plus grand intervalle contenu dans $A(l)$ possédant l, il est appelé *bassin immédiat* de l.

Vérifier que $I(l)$ est ouvert.

1.2 Etude au bord du bassin immédiat

Soit l un point fixe attractif de g. On suppose que les réels a et b sont dans I, et que $]a,b[\subset I(l) \subset [a,b]$. Montrer que $I(l) =]a,b[$, $g(I(l)) \subset I(l)$ et que $g(\{a,b\}) \subset \{a,b\}$.

2 Méthode de Newton générale

Soient J un intervalle ouvert de R, $f \in C^1(\mathrm{R},\mathrm{R})$, $I = \{x \in J | f'(x) \neq 0\}$; à tout point $x \in I$ on attache l'abscisse $N_f(x))$ du point d'intersection de la tangente à f en x avec Ox. On note $g = N_f$, et l'on appelle *suite de Newton* attachée à $x \in I$ la suite $x_n = u_n^x$ définie ci-avant ($x_0 = x$ $x_{n+1} = N_f(x_n)$).

2.1

Soit $x \in I$. Montrer que $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $N_f(x) = x$ ssi $f(x) = 0$, et calculer $N_f'(x)$ lorsque f est C^2.

2.2 Le cas convexe.

Soient I un intervalle ouvert de R, et f une fonction convexe C^1 strictement croissante sur I.

a) Montrer que f' est strictement positive.

b) On suppose que f s'annule en $a \in I$. Soit $x \in I$, $x > a$. Montrer que la suite de Newton x_n attachée à x converge vers a.

c) On suppose de plus I non borné à droite, f de classe C^2, $\delta > 0$, $S = [a-\delta, a+\delta] \subset I$ et l'on note $m = \min_{x \in S} f'(x)$ et $M = \max_{x \in S} f''(x)$. Montrer que, pour tout $x \in S$,

$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{M}{2m}|x_n - a|^2$$

3 La méthode de Newton pour les polynômes

Dans tout ce qui suit, d désigne un nombre entier ≥ 2 et P un polynôme réel de degré d. On note désormais : $I = \{x \in \mathrm{R} | P'(x) \neq 0\}$ et $g = N_P$ (Noter que, si P est proportionnel à Q alors $N_P = N_Q$).
Les notations et le vocabulaire sont ceux de la première partie, la fonction g étant fixée ci-dessus. Un réel x étant donné, la suite $x_n = u_n^x$ attachée à x et N_P est alors appelée *suite de Newton* de x.

3.1

Soit a un zéro de P. Montrer que N_P possède un prolongement C^1 en a. Expliciter la dérivée de N_P en a en fonction de la multiplicité de a comme zéro de P (on redonnera soigneusement la définition de cette notion). Montrer qu'un zéro a de P est un point fixe attractif de N_P.

3.2

On suppose que la suite de Newton x_n de x est définie sur $\mathbf{N}$ et converge vers un réel a. Montrer *soigneusement* que a est un zéro de P.

3.3

a) On suppose P scindé dans $\mathbf{R}[X]$. Montrer que, pour tout réel x plus grand que les racines de P, la suite de Newton x_n attachée à x converge.
b) On suppose que P a au moins deux racines réelles, soit a le plus petit zéro de P. On fait de plus l'hypothèse que le plus petit zéro γ de P' vérifie $a < \gamma$ et que $P''(x)$ ne s'annule pas pour $x < \gamma$. Montrer que le bassin immédiat de a est $]-\infty, \gamma[$.

3.4

On suppose que le bassin immédiat du zéro a de P est de la forme $]\alpha, \beta[$, avec α et β réels.

a) Montrer que $P(\alpha)P(\beta) \neq 0$.

b) Montrer que $P'(\alpha)P'(\beta) \neq 0$.

c) Vérifier enfin que $N_P(\alpha) = \beta$ et $N_P(\beta) = \alpha$.

3.5

On reprend les hypothèses de la question précédente. Montrer que le bassin immédiat de a pour N_P contient un zéro de P''.

3.6

On suppose P scindé à racines simples. Montrer que la suite de Newton issue d'un zéro de P'' converge vers un zéro de P.

4 Le cas complexe

Dans tout ce qui suit, P est un polynôme complexe de degré $d \geq 2$. On note $N = N_P$ la fraction rationnelle réduite $X - \frac{P}{P'}$, et l'on définit comme précédemment la suite (éventuellement finie) de Newton attachée à un nombre complexe z qui n'est pas un pôle de N.

4.1

Soient $F \in \mathbf{C}(X)$, et $[u, v]$ un segment de $\mathbf{C}$ ne comportant pas de pôles de F. Montrer que

$$|F(u) - F(v)| \leq |u - v| \sup_{z \in [u,v]} |F'(z)|.$$

On pourra utiliser la fonction $[0, 1] \to \mathbf{C}$, $t \to F(u + t(v - u))$.

4.2

Soit a un zéro de P. Montrer que N est définie au voisinage de a, et que $|N'(a)| < 1$. En déduire l'existence d'un nombre $r > 0$ tel que, pour tout $z \in \overline{D}(a, r)$, la suite de Newton z_n issue de z converge vers a.

4.3

Dans cette question, $P(X) = X^2 - 1$ et l'on définit $T : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}$, $z \to \frac{1+z}{1-z}$ et $q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \to z^2$.

a) Quelle est l'image de l'axe imaginaire par $z \to \frac{1-z}{1+z}$? par T ?

b) i) Etudier, pour $a \in \mathbf{C}$, la nature de la suite récurrente z_n donnée par $z_0 = a$ et $z_{n+1} = z_n^2$.
ii) Déterminer les $a \in S^1$ tels que z_n soit stationnaire, et prouver que les orbites stationnaires sont denses dans S^1.
iii) Montrer qu'il existe $a \in S^1$ tel que z_n soit dense dans S^1.

c) Montrer que $N \circ T = T \circ q$ tant que cela a un sens. En déduire, pour $z \in \mathbf{C}^*$, la nature de la suite de Newton attachée à z.

4.4

On suppose P de degré 2 normalisé. Montrer qu'il existe des nombres complexes $a \neq 0$ et b tels que $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \to az + b$ vérifie $P \circ S = S \circ Q$ ou $P \circ S = a^2 Q$, où Q est l'un des polynômes X^2 ou $X^2 - 1$. Comparer alors $S \circ N_Q$ et $N_P \circ S$, et étudier les suites de Newton issues de N_P sur $\mathbf{C}$.

4.5 Un complément de dynamique complexe

Soient λ un nombre complexe non nul et $P = \lambda X + X^2 \in \mathbf{C}[X]$. On note P^n le n-ième itéré de P.

a) (5/2) On suppose $|\lambda| < 1$. Montrer qu'il existe une série entière $f = \sum a_n z^n$, de rayon > 0, réalisant un C^1-difféomorphisme entre voisinages de 0 et telle que $f \circ P = \lambda f$ au voisinage de 0.

b) On suppose cette fois $\lambda = e^{2i\pi t}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, tel que la suite

$$|e^{2in\pi t} - 1|^{\frac{1}{2^n}}$$

admette 0 comme valeur d'adhérence. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et z complexe non nul tels que $|z| < \varepsilon$ et $P^n(z) = z$. Existe-t-il une fonction f vérifiant la propriété énoncée dans le a) ?

/

MNO ①

MÉTHODE DE NEWTON

I-1-a) C'est une question de cours.

I-1-b). Si u_n^x converge vers l, il existe un entier n tel que $u_n^x \in]l-\delta, l+\delta[$; s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n^x \in]l-\delta, l+\delta[$ il vient, $u_{n+1}^x \in g(]l-\delta, l+\delta[) \subset]l-\delta h, \delta h + l[\subset]l-\delta, l+\delta[$ d'où l'égalité demandée.

• Soit $a \in A(l)$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n^a \in]l-\delta, l+\delta[$.
Or $u_n^a = g^{on}(a)$ ($= g \circ \dots \circ g$ n fois), et g^{on} est une fonction continue, d'où $\eta > 0$ tel que $g^{on}(]a-\eta, a+\eta[) \subset]l-\delta, l+\delta[$.
ce qui donne : $]a-\eta, a+\eta[\subset A(l)$.

•• $I(l)$ est ouvert : sinon $I(l)$ contient l'une de ses extrémités, mettons a. Avec ce qui précède :

$$\exists \eta > 0, \ ]a-\eta, a+\eta[\subset A(l).$$

Il en résulte que $I' = I \cup]a-\eta, a+\eta[$ est un intervalle inclus dans $A(l)$, possédant l, et strictement plus grand que I, c'est absurde.

I-2. Comme I_l est ouvert, $I_l =]a, b[$. Supposons que $g(a) \in]a, b[$; la suite $u_n^{(a)} = u_{n+1}^a$ converge alors vers l, ce qui est exclu. Donc $g(a) \notin]a, b[$ — (1)

•• Si $x \in I_l$, $u_n^x \to l$ donc aussi : $u_{n+1}^x \to l$ et par suite $g(x) \in A(l)$. Mais cela vaut pour tout $y \in [l, x]$, $g([l, x]) (\subset]a, b[?)$ est un intervalle inclus dans $A(l)$ et donc : $g([l, x]) \subset I(l)$, à fortiori $g(x) \in I(l)$ soit $g(I(l)) \subset I(l)$ — (2)

••• a est limite d'une suite (x_n), $x_n \in]a, b[$, donc, par C^{te}, $g(a)$ est limite d'une suite $g(x_n) \in g(I(l)) \subset]a, b[$; par suite, $g(a) \in [a, b]$. Avec (1) : $g(a) \in \{a, b\}$

MN②

2.1 L'équation de la tangente à Γ_f en x est

$$Y - f(x) = f'(x)(X-x)$$

$Y=0$ donne $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; il vient alors :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}.$$

2.2 On sait que $f' \geq 0$; s'il existe $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$ la convexité donne : $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) = f(a)$.
Donc $f(x) \geq f(a)$ pour $x < a$ (I est ouvert, il y a de tels x) ce qu'on exclut.

b) • Soit $x > a$. La fonction f étant strictement convexe

$$0 = f(a) > \underbrace{f(x) + (a-x)f'(x)}_{\text{tangente en } x}$$

soit : $a < N_f(x)$; comme $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$

il vient : $a < N_{f}(x) < x$.

La suite de Newton décroît donc strictement.
Elle converge vers $l \in [a, x[$ tel que $N_f(l) = l$
i.e. $f(l) = 0$, nécessairement $l = a$.

•• On raisonne de même si $x < a$.

c) La formule de Taylor à l'ordre deux donne, sur $[x, a]$ (ou $[a, x]$)

$$f(a) - f(x) - f'(x)(a-x) = \frac{1}{2}f''(y)(x-a)^2,\ y \in [a, x]$$

soit :
$$-\frac{f(x)}{f'(x)} + x - a = \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(x)}(x-a)^2$$

i.e.
$$|N_f(x) - a| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(y)}{f'(x)}\right| \cdot |x-a|^2$$
$$\leq \frac{M}{2m}|x-a|^2$$

d'où le résultat, en remplaçant x par u_n ?.

3.1. Soit p la multiplicité de a, la définition donne $P(x) = (x-a)^p Q(x)$ où $Q(a) \neq 0$.

Il en résulte, pour $x \neq a$:

$$\frac{P(x)}{P'(x)} = \frac{(x-a)^p Q(x)}{(x-a)^p Q'(x) + p(x-a)^{p-1} Q(x)} = \frac{Q(x)(x-a)}{(x-a)Q'(x) + pQ(x)}$$

qui tend vers 0 en a ; ceci donne déjà un prolongement continu en a.

.. Si $p = 1$, $N_p'(x) = \dfrac{P(x)P''(x)}{P'^2(x)}$ tend vers 0 en a, qui est de ce fait un point fixe super-attractif de N_p.

... si $p \geq 2$, le plus efficace est de faire un développement limité : $P(a+h) = h^p\left[\dfrac{P^{(p)}(a)}{p!} + o(1)\right]$, $P'(a+h) = \dfrac{h^{p-1}}{(p-1)!}\left[\dfrac{P^{(p)}(a)}{p} + o(1)\right]$

et $P''(a+h) = \dfrac{h^{p-2}}{(p-2)!}\left[\dfrac{P^{(p)}(a)}{(p-2)!} + o(1)\right]$; après simplifications,

$$\frac{P(a+h)P''(a+h)}{P'^2(a+h)} \xrightarrow[h \neq 0]{h \to 0} \frac{(p-1)!\,(p-1)!}{p!\,(p-2)!} = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Le point fixe de N_p obtenu est contractant.

3.1 Attention, rien ne dit que $P'(a) \neq 0$!

Il vaut mieux écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$ $P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -P(x_n)$

ce qui permet de passer correctement à la limite pour obtenir $P(a) = 0$.

3.3 Soient $x_1 \leq \dots \leq x_n$ les racines de P.

On sait alors (exercice plus que classique) que pour $x \neq x_k$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}, \quad P'^2(x) - P(x)P''(x) = -P^2(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}$$

(ceci restant vrai en x_k), donc $P''(x)P(x)$ est > 0 pour $x > x_n$.

On est dans le cas de convexité décrit en 2. pour $x \geq x_n$.

La suite x_n d'origine $x > x_n$ tend vers x_n

3.3 - b). Si γ est un zéro de P, γ est attractif donc n'appartient pas au bassin d'attraction de a. Sinon N_p n'est pas défini en γ. MN(4)

.. Comme P'' ne s'annule pas sur $]-\infty, \gamma[$, il y garde un signe constant. Changer P en $-P$ ne change pas N_p, on suppose donc $P'' > 0$ sur $]-\infty, \gamma[$. On est à nouveau dans la situation de convexité du (2). (x_n) converge vers a si $x \in]-\infty, \gamma[$.

Comme $\gamma \notin A(a)$, il reste $I(a) =]-\infty, \gamma[$.

3.4 a) Si $P(\alpha) = 0$, α est un point fixe attractif de N_p et il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[, \quad x_n \longrightarrow \alpha.$$

Or $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\cap A(a) \neq \emptyset$, c'est absurde. Idem en β

b) Si $P'(\alpha) = 0$, du fait que $P(\alpha) \neq 0$ il vient

$$\lim_{x \to \alpha^+} |N_p(x)| = +\infty.$$

Or $N_p(]\alpha, \beta[) \subset]\alpha, \beta[$ selon (1), c'est absurde.

c) On sait déjà que $N_p(\alpha) \in \{\alpha, \beta\}$.

Si $N_p(\alpha) = \alpha$ il vient $P(\alpha) = 0$, c'est exclu. $\square$

3.5) Notons $G = N_p \circ N_p$, il vient :

$G'(\alpha) = N_p'(\beta) N_p'(\alpha)$. Si $N_p'(\alpha) = 0$ ou $N_p'(\beta) = 0$ il vient $G'(\alpha) = 0$: α est un point fixe attractif de $N_p \circ N_p$; soit $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]\alpha-\delta, \alpha+\delta[, \quad G^{on}(x) \to \alpha$$

il vient ; $\forall x \in \underbrace{]\alpha, \alpha+\delta[\cap]\alpha, \beta[}_{\neq \emptyset}$, $x_{2n} \to \alpha$ NON !

Ainsi $N_P'(\alpha) \neq 0$ et $N_P'(\beta) \neq 0$.

De plus $N_P(\alpha+h) = \underbrace{N_P(\alpha)}_{\beta} + h N_P'(\alpha) + o(h) \in]\alpha,\beta[$

pour $h > 0$ assez petit : $N_P'(\alpha) < 0$

de même $N_P'(\beta) < 0$

• Si P' ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$, P change de signe en a ; comme $P(\alpha)P''(\alpha) < 0$ $P''(\beta)P(\beta) < 0$,

$P''(\alpha)$ et $P''(\beta)$ ont des signes opposés ; P'' s'annule sur $]\alpha,\beta[$

•• Si P' s'annule sur $]\alpha,\beta[$, il ne peut s'annuler qu'en a ; et l'on sait qu'alors $N_P'(a) = 1 - \frac{1}{p} > 0$.

P'' s'annule donc sur $]\alpha, a[$ car $N_P'(\alpha) < 0$

$\exists c \in]\alpha, a[,\ N_P'(c) = 0$

$P''(c) = 0$

3.6 Notons $a_1 < \dots < a_d$ les racines ordonnées de P.

Le théorème de Rolle dit que P' possède $d-1$ racines distinctes $a_1 < b_2 < \dots < b_{d-1} < a_d$, et P'' $d-2$ racines distinctes $b_1 < c_1 < \dots < c_{d-2} < b_{d-1}$.

Avec 3.3 le bassin immédiat de a_1 est $]-\infty, c_1[$; celui de a_d est $]b_{d-1}, +\infty[$, enfin les bassins de $a_2, \dots, a_{d-1}$ sont bornés de la forme $]\gamma_k, \beta_k[$ $k = 2, \dots, d-1$ et deux à deux disjoints.

Or chacun d'eux contient, d'après 3.5, un zéro de P'' au moins ; on obtient ainsi tous les zéros de P''. $\square$

(4) Méthode de Newton complexe.

4.1 Il est facile de voir que, si P est un polynôme complexe et $u, w \in \mathbb{C}$, $\varphi : t \to P(u+tw)$ a pour dérivée $P'(u+tw).w$ (regarder pour X^m, puis CL).
Les règles usuelles de dérivation donnent alors que :
$F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ vérifie, $t \to F(u+tw)$ est dérivable, de dérivée $F'(u+tw).w$. Il en résulte, par continuité de $t \to F'(u+tw)w$, que :

$$|F(v) - F(u)| = \left|\int_0^1 F'(u+t\underbrace{w}_{v-u}).(v-u)\,dt\right|$$

$$\leq \sup_{z \in [u,v]} |F'(z)| . |v-u|$$

4.2 | on prend $F = N_P$, le début est celui de 3.1.
Soit k tel que : $|F'(a)| < k < 1$. La continuité de F' sur son domaine nous donne $r > 0$ tel que :

$$\forall z \in \overline{B}(a,r), \quad |F'(z)| \leq k.$$

Comme $\overline{B}(a,r) = \overline{D}(a,r)$ est CONVEXE le résultat de **4.1** fournit : $\forall v \in \overline{D}(a,r)$, $|F(v) - F(a)| \leq k|v-a|$
il est alors facile de voir que, si $z \in \overline{D}(a,r)$, la suite (z_n) de Newton issue de z prend ses valeurs dans $\overline{D}(a,r)$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n - a| \leq k^n |\underbrace{z_0}_{z} - a| \to 0$.

4.3 a) Soit $z = iy \in i\mathbb{R}$, il vient :

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1-iy}{1+iy} = \frac{(1-iy)^2}{1+y^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2} + i\frac{-2y}{1+y^2}$$

avec $z = i\,tg\,\theta/2$, $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\dfrac{1-z}{1+z} = \cos\theta + i\sin\theta$.

L'image cherchée est $S^1 \setminus \{-1\}$. Si $w = e^{i\theta}$
$\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\,\cot g\dfrac{\theta}{2}$ l'image de $S^1\setminus\{1\}$ par g est $i\mathbb{R}$.

4.3.b) Etude de $z \to z^{2^n} = z_n$.

si $|z|<1$, $z^{2^n} \to 0$, si $|z|>1$, $|z|^{2^n} \to +\infty$.

Reste le cas où $z \in S^1$.

- Si $z \in \cup\{e^{\frac{i\pi p}{2^n}} ; p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z^{2^n} = 1$ et alors : $\forall m \geq n, z_m = 1$.

Réciproque claire.

- Si $z \notin \cup\{e^{\frac{i\pi p}{2^n}} \mid (p,n) \in \mathbb{N}^2\}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z^{2^n} \neq 1.$$

Si z converge, de $z_{n+1} = z_n^2$ on tire $l = l^2$ et $l = 1$.

Il vient alors : $|z_{n+1} - 1| = |z_n + 1||z_n - 1| \geq \frac{3}{2}|z_n - 1|$

pour n assez grand ; ABSURDE $\to 1$

- Densité de $\{e^{\frac{i\pi p}{2^n}} ; (p,n) \in \mathbb{N}^2\}$ claire par densité des dyadiques dans $\mathbb{R}$.

- Existence d'une orbite dense.

On note P_{nk} les blocs de 0 et de 1 de taille n, $k \in \{1, \ldots 2^n\}$; soit, en base 2,

$a = 0, P_{11} P_{21} P_{12} \cdots P_{42} \cdots P_{n1} \cdots P_{n2^n} P_{n+1} \cdots$

et $z = e^{2i\pi a}$. Il vient ; pour $k \in \mathbb{N}^*$.

$z^{2^k} = \exp(2i\pi \cdot 2^k a)$ et il n'est pas difficile de voir que les z^{2^k} sont denses dans S^1.

4.3 (8)

Soit $\omega \in \mathbb{C}' \setminus \{-1,1\}$, il vient avec $z = T(\omega)$

$$N(T(\omega)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\omega}{1-\omega} + \frac{1-\omega}{1+\omega}\right) = \frac{1+\omega^2}{1-\omega^2} = T\circ q(\omega)$$

De là, tant que cela a un sens :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad N^{\circ m} \circ T(\omega) = T\circ q^{\circ m}(\omega) = T(\omega^{2^m})$$

L'égalité ci-dessus vaut visiblement sauf pour un nbre fini de $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}'$, en lesquels $\lim_{\omega \to \tilde{\omega}} |T(\omega^{2^m})| = +\infty$, ce sont donc les racines 2^m-ièmes de l'unité.

Sur $\bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} T(\mathbb{U}_{2^m} \setminus \{-1\})$, la suite de Newton n'est pas définie

Il s'agit d'un ensemble dense dans $T(S^1) = i\mathbb{R}$

Si ω n'est pas une racine 2^m-ième de l'unité, la suite $T(\omega^{2^m})$ diverge, donc $N^{\circ m}(z)$ aussi.

- L'image de $D(0,1)$ par T est $\{z \mid Re(z) > 0\}$:

Si $|\omega| < 1$, $\omega = re^{i\theta}$, $\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{1-r^2+2ir\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ donc $Re(z = T\omega) > 0$; si $Re(z) > 0$ et $\frac{1+\omega}{1-\omega} = z$ il vient $|\omega| = \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$ (la médiatrice de $[-1,1]$ est $Re(z) = 0$).

Ainsi : Pour $Re(z) > 0$, $N^m(z) \longrightarrow T(0) = 1$

- L'image de $\Omega = \mathbb{C}' \setminus \bar{D}(0,1)$ par T est $\{z \mid Re(z) < 0\}$, et pour $\omega \in \Omega$, $|\omega^{2^m}| \to +\infty$ et $T(\omega) \to -1$; Pour $Re(z) < 0$, $N^m(z) \to T(\infty) = -1$

Il y a donc un comportement "chaotique" sur l'axe imaginaire

44. • Si $P(X) = (X-\alpha)^2$, on prend $S(z) = z + \alpha$

• Si $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$, $\alpha \neq \beta$, on choisit a, b de sorte que $a\alpha + b = -1$, $a\beta + b = 1$ $(a \neq 0)$ il vient $P\circ S = a^2 Q$.

4.4 (Suite) Si $P\circ S = \lambda Q$ alors $N_{P\circ S} = N_Q$, or :

$$N_{P\circ S}(z) = z - \frac{P\circ S(z)}{a\cdot P'\circ S(z)} \Rightarrow S\circ N_{P\circ S}(z) = az+b - \frac{P(S(z))}{P'(S(z))}$$

$$\Rightarrow \underline{S\circ N_{P\circ S} = N_P\circ S}.$$

• Si $P(X) = (X-\alpha)^2$, de $P\circ S = X^2$ on déduit

$$S^{-1}(N_P(S(z))) = N_{P\circ S}(z) = \frac{S(z)}{2}$$

donc pour $m\in\mathbb{N}^*$

$$S^{-1}\circ N_P^{m}\circ S(z) = \frac{S(z)}{2^m} \to 0.$$

• Si $P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha\neq\beta$, de même :

$$\forall z,\ \forall m\geq 1 : S^{-1}\circ N_P^{\circ m}\circ S(z) = N_{X^2-1}^{\circ m}(S(z))$$

et la dynamique est donnée par 4,3.

4.5 a) Sera vu plus tard.

b) Pour départager les ex-aequo.

Il est clair que $\tilde{P}^m = \tilde{P}^{\circ m}$ est un polynôme unitaire de degré 2^m; en regardant le terme en X, $\tilde{P}^m(0) = 0$, $(\tilde{P}^m)'(0) = e^{2i\pi m\theta}$.

Soit $Q(z) = \frac{\tilde{P}^m(z) - z}{z}$, les racines de Q sont les points fixes de $\tilde{P}^m$ autres que 0, et leur produit est le terme constant de $Q\times(-1)^{2^m}$; avec des notations évidentes : $\prod_{k=1}^{2^m-1} z_k = (-1)(e^{2i\pi m\theta}-1)$

De là : $\prod_{k=1}^{2^m-1}|z_k| = |e^{2i\pi m\theta}-1|$. Soit $\rho_m = \min|z_k|$ il vient

$$0 < \rho_m^{2^m-1} \leq |e^{2i\pi m\theta}-1| \text{ et donc } \rho_m \leq \left(|e^{4i\pi m\theta}-1|^{\frac{1}{2^m}}\right)^{\frac{2^m}{2^m-1}}$$

L'hypothèse fait que $\underline{0\in \mathrm{Adh}(\rho_m)}$

c) NON, par l'absurde, à cause de b) (facile)